

Hans Humenberger, Universität für Bodenkultur, Wien

Schubkurbel 2. Teil

Mathematische Inhalte:

Trigonometrie, Optimierung, Differentialrechnung, Näherungsverfahren.

Kurzzusammenfassung:

Für eine geschränkte Schubkurbel wird eine Optimierungsaufgabe gestellt und auf 2 prinzipiell verschiedene Arten gelöst.

Lehrplanbezug:

3. - 4. Jahrgang

Zeitaufwand:

3-4 Stunden

Mediales Umfeld: PC mit CAS Software

Anmerkung:

Dieser Artikel ist eine Fortsetzung eines Beitrags, der in der 10. Aussendung erschienen ist. Im 1. Teil wurden zentrische Schubkurbeln behandelt

5 Geschränkte Schubkurbel

In Fig. 7 ist nochmal das Schema einer geschränkten Schubkurbel dargestellt, wobei wir wiederum in Radien R messen (Kleinbuchstaben von p, h, ℓ, e wie oben; $r = 1$).

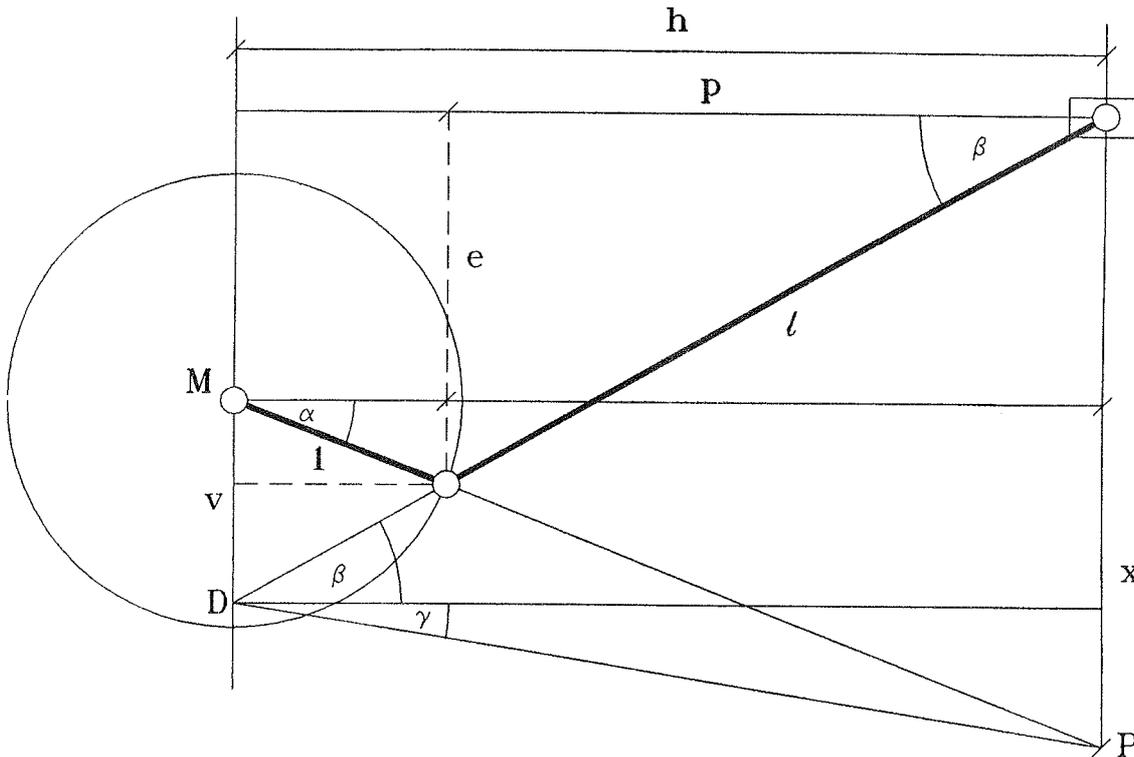


Fig. 7: Schema einer *geschränkten* Schubkurbel mit $r = \frac{R}{R} = 1$

Wir gehen nun – unter Beachtung der Exzentrizität E bzw. e – ganz analog wie bei der zentrischen Schubkurbel vor.

Aus Fig. 7 ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$p = \sqrt{\ell^2 - (e + \sin \alpha)^2}, \tag{17}$$

$$h = \cos \alpha + p, \tag{18}$$

$$v = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{e + \sin \alpha}{p} \left(= -\frac{dh}{d\alpha} ! \right). \tag{19}$$

Eine wichtige Erkenntnis daraus ist wiederum, daß $v = -\frac{dh}{d\alpha}$ gilt, daß auch im Fall einer geschränkten Schubkurbel die Länge der Strecke $v = \overline{MD}$ als Betrag der Kolbengeschwindigkeit deutbar ist. Dies haben wir auch schon geometrisch-kinematisch gefunden.

Nun wollen wir auch hier analytisch zeigen, daß die Kolbengeschwindigkeit v genau dann maximal ist, wenn Schubstange und Polstrahl PD aufeinander normal stehen:

$v \text{ ist maximal} \iff \beta + \gamma = 90^\circ.$

Für den Winkel β ergibt sich zunächst

$$\beta = \arctan \frac{e + \sin \alpha}{p}. \tag{20}$$

Weiters lesen wir aus Fig. 7 die Analoga zum zentrischen Fall ab: $x = h \cdot \tan \alpha$ und $v = h \cdot \frac{e + \sin \alpha}{p} - e$; damit ergibt sich für $\gamma = \arctan \frac{x-v}{h}$ in weiterer Folge

$$\gamma = \arctan \left(\tan \alpha - \frac{e + \sin \alpha}{p} + \frac{e}{h} \right). \quad (21)$$

Nun haben wir zu zeigen (bei Vernachlässigung der Untersuchung der zweiten Ableitung):

$$\underbrace{\frac{dv}{d\alpha} = 0}_{(*)} \Leftrightarrow \underbrace{\beta + \gamma = 90^\circ}_{(**)}.$$

Wir widmen uns zunächst der Bedingung (*) und bilden

$$\frac{dv}{d\alpha} = \cos \alpha - \sin \alpha \frac{e + \sin \alpha}{p} + \cos \alpha \cdot \frac{p \cos \alpha - \frac{dp}{d\alpha}(e + \sin \alpha)}{p^2},$$

so daß die Bedingung (*) nach Multiplikation mit p^2 und Einsetzen von $\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{(e + \sin \alpha) \cos \alpha}{p}$ äquivalent ist mit $p^2 \cos \alpha - p \sin \alpha (e + \sin \alpha) + p \cos^2 \alpha + \frac{(e + \sin \alpha)^2 \cos^2 \alpha}{p} = 0$. Wir erhalten daraus weiter

$$p \cos^2 \alpha + p^2 \cos \alpha = p \sin \alpha (e + \sin \alpha) - \frac{(e + \sin \alpha)^2 \cos^2 \alpha}{p} \quad (22)$$

$$p \cos \alpha (\cos \alpha + p) = (e + \sin \alpha) \left[p \sin \alpha - \frac{(e + \sin \alpha) \cos^2 \alpha}{p} \right] \quad (23)$$

$$p^2 \cos \alpha (\cos \alpha + p) = (e + \sin \alpha) \left[p^2 \sin \alpha - (e + \sin \alpha) \cos^2 \alpha \right], \quad (24)$$

und daraus schließlich

$$\boxed{\frac{p^2 \cos \alpha (\cos \alpha + p)}{e + \sin \alpha} = p^2 \sin \alpha - (e + \sin \alpha) \cos^2 \alpha.} \quad (25)$$

Nun betrachten wir Bedingung (**), die $\beta + \gamma = 90^\circ$ gelautet hat. Sie ist äquivalent mit $\tan \gamma = \tan(90^\circ - \beta) = \cot \beta$, wobei wir analog aufgrund der arctan-Beziehungen für β bzw. γ in (20) bzw. (21) die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{e + \sin \alpha}{p} + \frac{e}{\cos \alpha + p} = \frac{p}{e + \sin \alpha}$$

erhalten. Multiplizieren wir diese mit den Nennern ihrer linken Seite, so erhalten wir

$$p \sin \alpha (\cos \alpha + p) - \cos \alpha (e + \sin \alpha) (\cos \alpha + p) + p e \cos \alpha = \frac{p^2 \cos \alpha (\cos \alpha + p)}{e + \sin \alpha},$$

woraus sich sofort

$$p \sin \alpha \cos \alpha + p^2 \sin \alpha - (e + \sin \alpha) (\cos^2 \alpha + p \cos \alpha) + p e \cos \alpha = \frac{p^2 \cos \alpha (\cos \alpha + p)}{e + \sin \alpha},$$

und daraus dieselbe Beziehung wie (25) ergibt! Die Bedingungen (*) und (**) sind daher, wie behauptet, äquivalent!

Im Folgenden soll nicht die Äquivalenz von (*) und (**) im Vordergrund stehen, sondern deren Lösung! Ausgehend von einer der beiden oder auch von Beziehung (25) erhält man nach einigen Umformungen als eine mögliche Form der zu lösenden Gleichung

$$\left[\sin \alpha (e + \sin \alpha) (\ell^2 - (e + \sin \alpha)^2) - \ell^2 \cos^2 \alpha \right]^2 = \cos^2 \alpha \left[\ell^2 - (e + \sin \alpha)^2 \right]^3. \quad (26)$$

Dies ist eine **Gleichung 8. Grades** in $\sin \alpha$, die wir natürlich nur näherungsweise und (sinnvollerweise) auch nur computerunterstützt lösen können. Wenn aber ein einigermaßen leistungsfähiges Programm zur Verfügung steht, muß die Gleichung ja nicht allzuweit (bzw. gar nicht) vereinfacht werden für die Anwendung des NEWTON-Verfahrens. Macht man doch einige Umformungen (z.B. $x \stackrel{\text{def}}{=} \sin \alpha$), so ergibt sich z.B. für die Werte $\ell = 10$ und $e = 1$ (also z.B.¹³ $E = R = 1$ und $L = 10$) nach wenigen Schritten

$$\left[\frac{1}{10} (2x^2 + x - 1) - \frac{1}{1000} (x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x) \right]^2 - (1 - x^2) \left(\frac{99}{100} - \frac{1}{50}x - \frac{1}{100}x^2 \right)^3 = 0, \quad (27)$$

für deren Lösung das NEWTON-Verfahren (Startwert $x_0 = 0.95$) die Werte $x_1 \approx 0.981449$ bzw. $x_2 \approx 0.980953$ liefert, wobei die bei x_2 angegebenen sechs Dezimalstellen bei den weiteren Schritten schon unverändert bleiben.

Für α_{\min} bedeutet dies einen Wert von ungefähr $1.37531 \approx 78.80^\circ$. Auch hier ist α_{\min} wirklich nahe jenem Winkel, bei dem Schubstange und Kurbelradius aufeinander normal stehen. Dieser ergibt sich in unserem Fall mittels einer Skizze (siehe Fig. 8) und kurzer Überlegung zu $\alpha = 2\varphi - \frac{\pi}{2} = 2 \arctan 10 - \frac{\pi}{2} \approx 1.3715 \approx 78.58^\circ$.

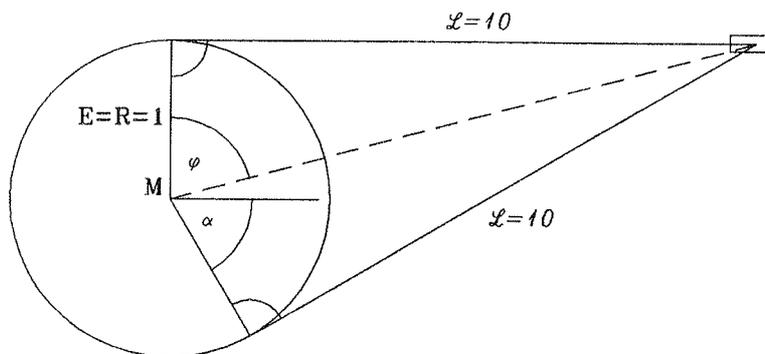


Fig. 8: Geschränkte Schubkurbel: $E = R = 1$ und $L = 10$ – Maße nicht im richtigen Verhältnis dargestellt!

Die zweite Nullstelle liegt hier genau bei $x = -1$, wie man in Gleichung (27) unmittelbar sieht, bzw. äquivalent dazu bei $\alpha = \alpha_{\max} = \frac{3\pi}{2}$, wie in Gleichung (26) unmittelbar zu sehen ist¹⁴ ($\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$). Hier ($E = R$, d.h. die Kurbel berührt die Bahngerade des Kolbens) stehen bei $\alpha_{\max} = \frac{3\pi}{2}$ Schubstange und Kurbelradius wirklich aufeinander normal (daß hier bei $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ein Geschwindigkeitsextremum vorliegt, ist anhand der realen Situation – vgl. Fig. 8 – bei etwas Überlegung wohl auch *a priori* zu vermuten)!

Im geschränkten Fall verliert jedoch nicht nur die Beziehung $\alpha_{\max} = -\alpha_{\min}$ ihre Gültigkeit, sondern auch $v_{\max} = -v_{\min}$ und $h(\alpha_{\max}) = h(\alpha_{\min})$. In $h(\alpha)$ bzw. $\frac{dh}{d\alpha}$ können wir die erhaltenen

¹³Die Tatsache $1 = r = e$ bzw. $R = E$ bedeutet, daß die Kurbel die Bahngerade des Kolbens bzw. deren Verlängerung „berührt“.

¹⁴In anderen Fällen ist die Stelle des zweiten Extremums auch durch ein Näherungsverfahren zu bestimmen.

Werte für α_{opt} (nämlich $\alpha_{\text{min}} \approx 1.3753$ bzw. $\alpha_{\text{max}} = \frac{3\pi}{2}$) einsetzen – siehe die Gleichungen (17), (18) bzw. (19) – und erhalten Werte, die den schon angesprochenen Verlust der im zentrischen Fall herrschenden „Symmetrien“ numerisch bestätigen:

$$h(\alpha_{\text{min}}) \approx 9.996 \quad h(\alpha_{\text{max}}) = 10 \quad v_{\text{min}} \approx -1.02 \quad v_{\text{max}} = 1 .$$

Bei zentrischen Schubkurbeln ist der größte Wert von h bei $h_{\text{max}} = \ell + 1$ (für $\alpha = 2k\pi$) und der kleinste bei $h_{\text{min}} = \ell - 1$ (für $\alpha = (2k + 1)\pi$). Diese Eigenschaft geht bei geschränkten Schubkurbeln klarerweise auch verloren! Es bleibt jedoch die Eigenschaft, daß der größte Wert h_{max} dann auftritt („oberer Totpunkt“), wenn der Kurbelradius genau in der Verlängerung der Schubstange liegt (dies ist leicht anschaulich und elementar zu begründen). Der kleinste Wert für h („unterer Totpunkt“) tritt ebenfalls weiterhin dann auf, wenn Schubstange und Kurbelradius¹⁵ genau übereinander zu liegen kommen (dies ist nicht trivial und bedarf auch hier einer genauen Begründung!). Dies bedenkend und mit Hilfe einer entsprechenden Skizze (siehe Fig. 9) kommt man schnell zu den jeweiligen Winkelwerten von α in diesen Situationen: $\alpha_1 = \arcsin\left(-\frac{e}{\ell+1}\right)$ und $\alpha_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{e}{\ell-1}\right)$. Man kann zu diesem Zweck *auch* die Gleichung $\frac{dh}{d\alpha} = 0$ lösen (gute Übung für Schüler bzw. Studenten, kein Näherungsverfahren nötig; die geometrische Lösung mit Hilfe der Skizzen sollte jedoch nicht dadurch ersetzt werden). Aus den Gleichungen (17) und (18) erhalten wir für $v = 0$ bzw. $\frac{dh}{d\alpha} = 0$ eine quadratische Gleichung in $\sin \alpha$ mit den Lösungen $\sin \alpha_1 = -\frac{e}{\ell+1}$ und $\sin \alpha_2 = \frac{e}{\ell-1}$. Durch Einsetzen sieht man rasch, daß bei α_2 der Supplementärwinkel $\pi - \alpha_2$ die eigentliche Lösung darstellt (dies ist eine mögliche exakte Begründung der „unteren Totlage“). Wir erhalten bei unseren Werten $e = 1$ und $\ell = 10$: $\alpha_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{11}\right) \approx -0.091 \approx -5.22^\circ$ bzw. $\alpha_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{9}\right) \approx 3.030 \approx 173.62^\circ$. Dies ergibt für $h_{\text{max}} = h(\alpha_1) \approx 10.954$ und für $h_{\text{min}} = h(\alpha_2) \approx 8.944$.

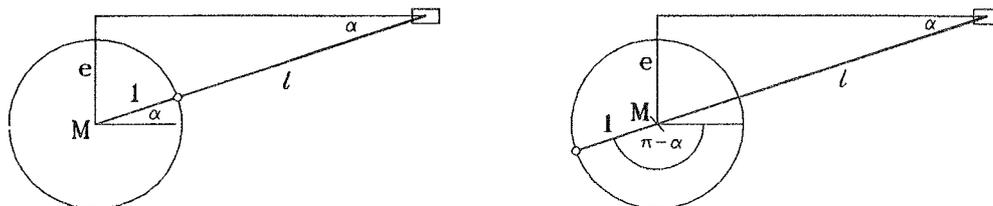


Fig. 9: Totlagen bei einer geschränkten Schubkurbel

Intuitive (präformale) Begründungen: Da – wie schon bemerkt – der optimale Winkel α_{opt} in der Nähe jenes Winkels liegen wird, bei dem Kurbelradius und Schubstange aufeinander normal stehen, ist es auch *a priori* vorhersehbar, daß eine Vergrößerung von e bzw. E oder eine Verkleinerung von ℓ bzw. L (oder eine Vergrößerung von R) — hier wurden im Vergleich zu den obigen Verhältnissen im zentrischen Fall *beide* Werte verändert: $e : 0 \rightarrow 1$, $\ell : 11 \rightarrow 10$ — eine Verkleinerung von α_{opt} bewirken muß (siehe Fig. 1, Begründung!). Analog sieht man, daß eine Vergrößerung von ℓ bzw. L eine Vergrößerung von α_{opt} bewirkt („Verlagerung des rechten Winkels“). Überlegungen solcher Art – *Abschätzungen, intuitive Begründungen* etc. – sind u.E. gerade im Hinblick auf Anwendungsorientierung besonders wichtig, da diese das *Verständnis* bzw. die *verständige Handhabung* fördern und erfordern.

¹⁵Gemeint ist die Verbindung Kurbelmittelpunkt — Kurbelzapfen.

6 Eine Lösung von prinzipiell anderer Art

Eine grundlegend andere Form der Approximation wäre durch die Methode von KIRSCH (1994) gegeben. Hier wird nicht in „Radiengemessen“, sondern die „Originalgrößen“ R, L, H werden beibehalten¹⁶, wobei nicht H selbst zweimal nach α abgeleitet wird (dort ist der Rotationswinkel δ etwas anders gewählt: $\delta = \frac{\pi}{2} - \alpha = 90^\circ - \alpha$), sondern ein Näherungswert H_N , der durch die bekannte Näherungsformel $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ ($|x| \ll 1$) aus H gewonnen wird. Bei KIRSCH wird eine quadratische „Näherungsgleichung“ exakt gelöst, während wir die exakte Gleichung näherungsweise gelöst haben.

Zentrische Schubkurbel

KIRSCH widmet sich zentrischen Schubkurbeln, wobei aus (vgl. die Gleichungen 17 und 18 bzw. Fig. 7)

$$H(\alpha) = \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \alpha} + R \cos \alpha = L \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2 \alpha} + R \cos \alpha$$

der Näherungswert H_N gewonnen wird

$$H_N(\alpha) := L \left(1 - \frac{R^2}{2L^2} \sin^2 \alpha \right) + R \cos \alpha = L - \frac{R^2}{2L} \sin^2 \alpha + R \cos \alpha .$$

Die Differentiation nach α ergibt dann $H'_N = -\frac{R^2}{2L} \sin(2\alpha) - R \sin \alpha$, und für die zweite Ableitung, deren Nullstellen wir suchen, erhält man

$$H''_N = -\frac{R^2}{L} \cos(2\alpha) - R \cos \alpha = 0 .$$

Diese Gleichung kann mit $-\frac{L}{R}$ multipliziert und weiters vermöge der bekannten Formel $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ in eine quadratische Gleichung in $\cos \alpha$ umgeschrieben und dadurch gelöst werden. Die entstehende Gleichung

$$2R \cos^2 \alpha + L \cos \alpha - R = 0$$

hat in $[-1, 1]$ als einzige Lösung $\cos \alpha = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 8R^2}}{4R}$, woraus man mit unseren Werten $R = 1$ und $L = 11$ sofort den Wert $\alpha_{\text{opt}} = 84.87^\circ$ erhält, der nur um 0.02° von unserem obigen Resultat abweicht.

Bemerkung: Die mit den jeweiligen Methoden erhaltenen Werte stimmen sehr gut überein: Die Methode von KIRSCH angewandt auf unsere Fragestellung ergäbe 84.87° (bei uns 84.85°), während unsere Methode angewandt auf die dortige Fragestellung 14.3° ergäbe (dort 13.9°). Die größere Abweichung der beiden Methoden bei seiner Problemstellung erklärt sich dadurch, daß dort $\ell = \frac{1}{3} \approx 3.67$, also bedeutend kleiner als der entsprechende Wert in unserer Fragestellung ist. Mit fallendem ℓ wird die dortige Methode nämlich immer ungenauer, sie erfüllt aber – wie man sieht – für realistische Werte von ℓ trotzdem alle (insbesondere für die Schule!) sinnvollen Genauigkeitsansprüche.

Geschränkte Schubkurbel

Leider führt die Methode von KIRSCH im Fall einer geschränkten Schubkurbel nicht auf eine quadratische Gleichung, sondern auf eine Gleichung 4. Grades (bzw. 3. Grades im Fall $R = E$). Aus

$$H(\alpha) = \sqrt{L^2 - (E + R \sin \alpha)^2} + R \cos \alpha = L \sqrt{1 - \frac{1}{L^2} (E + R \sin \alpha)^2} + R \cos \alpha$$

¹⁶Dies wollen wir – der Originalität halber – hier auch tun.

erhalten wir durch Anwendung derselben Näherungsformel ($\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ für $|x| \ll 1$):

$$H_N(\alpha) := L \left(1 - \frac{1}{2L^2} (E + R \sin \alpha)^2 \right) + R \cos \alpha = L - \frac{1}{2L} (E + R \sin \alpha)^2 + R \cos \alpha .$$

Die erste Ableitung ergibt sich zu $H'_N(\alpha) = -\frac{1}{2L} (2RE \cos \alpha + R^2 \sin(2\alpha)) - R \sin \alpha$, und die zweite zu

$$H''_N(\alpha) = -\frac{1}{2L} (-2RE \sin \alpha + 2R^2 \cos(2\alpha)) - R \cos \alpha .$$

Multiplizieren wir die Gleichung $H''_N(\alpha) = 0$ mit $\frac{L}{R^2}$, so erhalten wir wegen $\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1$

$$\frac{E}{R} \sin \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1) = \frac{L}{R} \cos \alpha ,$$

bzw., wenn wir unsere Abkürzungen $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \frac{L}{R}$ und $e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E}{R}$ nun doch benutzen,

$$e \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \ell \cos \alpha - 1 .$$

Durch Quadrieren und Ordnen nach $\cos \alpha$ -Potenzen ergibt sich die Gleichung 4. Grades

$$4 \cos^4 \alpha + 4\ell \cos^3 \alpha + (\ell^2 + e^2 - 4) \cos^2 \alpha - 2\ell \cos \alpha + (1 - e^2) = 0 ,$$

also eine Gleichung in $\cos \alpha$, deren Lösung (in der Schule) auch ein Näherungsverfahren verlangt. Im Fall $R = E$ bzw. $e = 1$ ist verschwindet das absolute Glied und $\cos \alpha = 0$ ist dann offenbar eine Nullstelle, d.h. $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ scheidet durch Einsetzen als Lösung aus). Es bleibt aber für die zweite Lösung noch eine Gleichung 3. Grades zu lösen:

$$4 \cos^3 \alpha + 4\ell \cos^2 \alpha + (\ell^2 - 3) \cos \alpha - 2\ell = 0 .$$

Setzen wir für unseren Fall den Wert $\ell = 10$ ein, so erhalten wir nach Division durch 4

$$\cos^3 \alpha + 10 \cos^2 \alpha + \frac{97}{4} \cos \alpha - 5 = 0 .$$

Anwendung eines Näherungsverfahrens (oder auch die exakte Lösung mit DERIVE — CARDANO-Formeln) bringt für $\cos \alpha$ den einzigen reellen Wert $\cos \alpha \approx 0.190874$, was für α_{opt} ca. $78.99^\circ \approx 79^\circ$ bedeutet — ein Wert, der zum obigen (78.80°) nur um 0.20° abweicht.

Bemerkung: Wenn aber ohnedies ein Näherungsverfahren zur Lösung der resultierenden *Näherungsgleichung* eingesetzt werden muß, so liegt (bei *geschränkten* Schubkurbeln) in der beschriebenen Methode wohl keine besondere Vereinfachung, obwohl zumindest der Grad der zu lösenden Gleichung von 8 — siehe Gleichung (27) bzw. (26) — auf 4 reduziert wird (näherungsweise kann aber auch die exakte Gleichung gelöst werden). Es ist weiters i.a. keineswegs von vornherein klar bzw. gesichert, daß aus einer Näherungsaussage $H_N \approx H$ das Analogon für die zweite Ableitung, also $H''_N \approx H''$, folgt (es geht ja um die Nullstellen der zweiten Ableitung), jedoch liefert — wie man sieht — diese Methode hier sehr brauchbare Ergebnisse!

Für das **Literaturverzeichnis** und für die Anschrift des Verfassers siehe den Schluß des ersten Teils in AMMU 10 (Juni 1997), Beitrag 1.

