

Hans Humenberger, Universität für Bodenkultur, Wien

Schubkurbel 1. Teil

Mathematische Inhalte:

Optimierung, Näherungslösungen, Trigonometrie, Differentialrechnung

Anwendung:

Zentrische Schubkurbel, kinematische und analytische Argumente bei einem Optimierungsproblem

Kurzzusammenfassung:

Nach einigen allgemeinen didaktischen Bemerkungen über *anwendungsorientierten Mathematikunterricht* wird das Prinzip einer *Schubkurbel* erklärt und eine Optimierungsaufgabe gestellt. Anhand einfacher kinematischer Überlegungen wird die Aufgabe zunächst „ohne Rechner gelöst“, woran sich Überlegungen mit Differentialrechnung (bei zentrischen Schubkurbeln) anschließen.

Lehrplanbezug:

3. - 4. Jahrgang

Zeitaufwand:

3 - 4 Stunden

Mediales Umfeld:

Hardware: Personal Computer Software: CAS (z. B. Derive, Mathcad, Mathematica)

Anmerkungen:

Dieser Artikel ist der erste Teil eines Beitrages, dessen Fortsetzung in der 11. Ausgabe erscheinen wird. Dort wird es primär um *geschränkte* Schubkurbeln und um eine Lösung von prinzipiell anderer Art gehen.

Optimierung und Approximation, ein elementares Beispiel bei einem Kurbelgetriebe — Teil 1

Hans Humenberger, Univ. f. Bodenkultur, Wien

1 Einleitung

Die Forderung nach Anwendungsorientierung bzw. nach Realitätsbezügen im Mathematikunterricht steht nun schon seit Anfang der Siebziger-Jahre im Zentrum vieler mathematikdidaktischer Diskussionen. Das Spektrum reicht hierbei von geradezu euphorischen Erwartungen gegenüber einem anwendungsorientierten Mathematikunterricht, daß also nur ein solcher geeignet sei, den Schülern Mathematik beizubringen, daß die Schüler durch die Anwendungsorientierung ungleich besser dazu befähigt würden, das Gelernte schon in der Schule und insbesondere später (Beruf, Alltag, Studium etc.) selbständig in neuen Situationen anzuwenden, bis hin zu völliger Ablehnung jeder versuchten Anwendungsorientierung, da im Unterricht ohnehin nur „Scheinanwendungen“ behandelt werden könnten und die innere „Schönheit“ der Mathematik doch wichtiger als ihre Brauchbarkeit sei. Extreme Haltungen scheinen hier zwar immer mehr an Boden zu verlieren, aber selbst innerhalb der gemäßigten Richtungen gibt es noch viele Meinungsverschiedenheiten – wir wollen hier jedoch *keine* allgemeine didaktische Abhandlung über Anwendungsorientierung verfassen!

Wir glauben, daß *Mathematik als formales System* im „durchschnittlichen“ deutschsprachigen Unterricht eindeutig im Mittelpunkt steht, um die herum vereinzelt einige Anwendungen präsentiert werden (meist vom Lehrer vorgeführt oder zumindest sehr stark gelenkt, ohne bzw. mit nur sehr wenigen Schüleraktivitäten – außer dem Einsetzen in gelernte Formeln), und zwar entweder *a posteriori* zur Illustration des Gelernten, zur Demonstration, daß man das Gelernte auch irgendwo anwenden kann, oder *a priori* als (meist einzelnes) vorgegebenes Einstiegsproblem, dessen Lösung nach der Behandlung des eigentlichen mathematischen Stoffs nachgereicht wird. All diese „Unterrichtsformen“ sind u.E. gar nicht prinzipiell abzulehnen, nur sollte sich die Anwendungsorientierung eines Unterrichts nicht darin erschöpfen. Von einem halbwegs durchgehenden Unterrichtsprinzip, das auch nur zeitweise im Vordergrund stünde, kann bei der Anwendungsorientierung u.E. allerdings nur eher selten gesprochen werden.

Für die konkrete Umsetzung eines anwendungsorientierten Unterrichts bedarf es selbstverständlich gewisser Leitlinien, sogenannter *Fundamentaler Ideen*, anhand derer der Unterricht dem *Spiralprinzip* folgend strukturiert werden könnte (vgl. HUMENBERGER/REICHEL 1995). Zwei wichtige Vertreter dieser Fundamentalen Ideen der Angewandten Mathematik sind z.B. **Optimierung** und **Approximation**. Um genau diese beiden soll es nun im folgenden gehen und zwar um eine mögliche Verbindung von ihnen an einem ausführlich durchgearbeiteten Beispiel.

2 Eine Aufgabe bei „geraden Schubkurbeln“

Es gilt hier zunächst einmal zu erklären, was eine *gerade Schubkurbel* überhaupt ist. Die „Umkehrung“ einer Schubkurbel ist vielen wahrscheinlich geläufiger, nämlich durch den bekannten Mechanismus, mit dem z.B. bei Autos die geradlinige Auf-und-ab-Bewegung der Kolben eines Verbrennungsmotors in eine Rotationsbewegung umgewandelt wird („Hubkolbenmotor“). Bei

einer Schubkurbel passiert nun genau das Umgekehrte: die Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des *Kurbelzapfens* (dies ist die Gelenkverbindung von Kurbel und Schubstange) wird durch den gleichen Mechanismus in eine geradlinige Auf-und-ab- bzw. Hin-und-her-Bewegung eines „Kolbens“ (auch *Kreuzkopfzapfen* oder *Kreuzkopf* genannt) umgewandelt (wegen der *geradlinigen* Bewegung des Kolbens (Kreuzkopfes) spricht man auch von einer *geraden* Schubkurbel bzw. von einer *Geradschubkurbel*). Ein Schubkurbelgetriebe besteht also aus einer voll umlauffähigen *Kurbel* (Radius R), die über den *Kurbelzapfen* und durch eine sogenannte *Pleuel-* oder *Schubstange* (Länge L) mit dem *Kolben* oder *Kreuzkopf* gelenkig verbunden ist. Die Schubstange überträgt die Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des Kurbelzapfens auf den geradlinig sich bewegenden Kreuzkopf bzw. Kolben.

Man unterscheidet *zentrische* (siehe Fig. 1) und *geschränkte* Schubkurbeln (siehe Fig. 2).

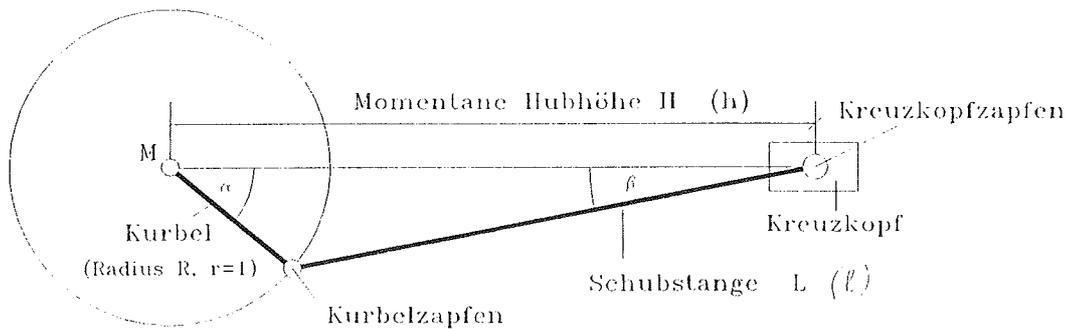


Fig. 1: Zentrische Schubkurbel

Bei der zentrischen Geradschubkurbel geht die Verlängerung der Bahngerade des Kolbens durch den Kurbelmittelpunkt, während bei der geschränkten Geradschubkurbel dies nicht der Fall ist; die Kurbel ist hier in bezug auf die Bahngerade des Kolbens etwas versetzt, wobei der Abstand des Kurbelmittelpunktes von der Verlängerung der Bahngeraden als *Exzentrizität* (E) bezeichnet wird (siehe Fig. 2). Die Bezeichnung in Fig. 1 mit Kleinbuchstaben ($h, r = 1, \ell$) steht für den Fall, daß man den Radius der Kurbel mit 1 festsetzt, m.a.W. daß man Längen in „Radien R mißt“ (siehe Abschnitt 4).

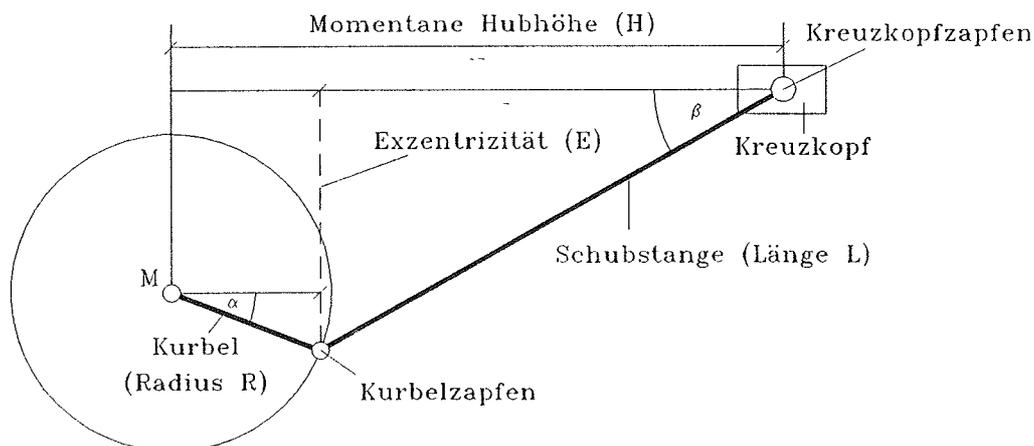


Fig. 2: Geschränkte Schubkurbel

Bemerkung: Eine gängige Anwendung des Schubkurbelgetriebes stellen z.B. die in der Holzverarbeitenden Industrie (insbesondere bei Sägewerken) weit verbreiteten *Gattersägen* dar, bei denen die gleichmäßige Rotation eines Elektromotors (früher eines Wasserrades) in eine geradlinige Sägebewegung umgewandelt wird; diese Gattersägen dienen vor allem zur Bearbeitung von noch rohen Baumstämmen.

Bei der folgenden Aufgabe handelt es sich u.E. nicht um eine „nur eingekleidete“ Aufgabe, sondern solche Probleme kommen wirklich in der Praxis vor. Wir stehen jedoch der sehr alten Tradition des *Einkleidens von Aufgaben* ohnehin nicht von vornherein negativ gegenüber (selbst wenn es Aufgaben sind, die nicht unbedingt aus der sogenannten „echten Praxis“ stammen¹), denn das Prinzip des Anwendens von Mathematik (Bilden von Modellen, Herantasten an eine Lösung bei einem ungewohnten Problem, Probieren, Vermutungen aufstellen, numerische Überlegungen etc.) kann auch an vielen „nur eingekleideten“ Aufgaben *gelernt bzw. geübt* werden. Bei solchen Beispielen sollte bei den Schülern allerdings nicht der Eindruck entstehen, *diese selbst* seien ein eminent wichtiger Teil der *Angewandten Mathematik* schlechthin. Oft werden ausschließlich „nur eingekleidete Aufgaben“ von Lehrern zur vermeintlichen Rechtfertigung der Mathematik benutzt, um zu zeigen, „welch tolle Dinge“ mit Mathematik möglich sind. Obwohl wir das Einkleiden an sich für eine gute Tradition halten, darf sich die Anwendungsorientierung eines Unterrichts nicht darin erschöpfen – um in den Schülern *kein falsches* Bild von Mathematik (insbesondere von Angewandter bzw. *anwendbarer* Mathematik) zu generieren.

Im folgenden Beispiel sehen wir eine gute Gelegenheit, verschiedene mathematische Inhalte miteinander zu verbinden² (Differenzieren, Trigonometrie, Lösen von Gleichungen, numerische Aspekte – Näherungsverfahren etc.) und zwar auf eine elementare Weise. Besonders betonen möchten wir hierbei das Zusammenwirken von *Optimieren* und *Approximation*³.

Beispiel 2.1 In den Fig. 1 und 2 sind Geradschubkurbeln schematisch dargestellt. Die Größen L , R und E sind dabei konstant, während α , β und H sich verändern, also von der Zeit abhängige Größen sind. Wir wollen nun jenen Winkel α bestimmen, für den die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes (Kolbens) („Schubgeschwindigkeit“) maximal ist⁴, wenn wir eine gleichmäßige Rotationsbewegung der Kurbel bzw. des Kurbelzapfens voraussetzen.

3 Graphische bzw. mechanisch-kinematische Überlegungen

Die Ausführungen dieses Abschnittes sollen bloß propädeutischen Charakter haben. Sie sind zwar vielleicht etwas ungewohnt und scheinen (dadurch?) manchmal bzw. manchem kompliziert zu sein, aber sie können helfen, etwas Licht ins Dunkel zu bringen, bevor mit Methoden der Differentialrechnung dieselben Erkenntnisse gewonnen werden. Daneben kann dieser Abschnitt als ein Beitrag zur Darstellung der Vielfalt der Optimierungsmöglichkeiten gesehen werden, ein Thema, das uns ohnehin sehr am Herzen liegt! Die spezielle Situation, bei der der Kolben die größte Geschwindigkeit hat, soll dadurch besser verständlich werden. Es ist nämlich *nicht* jene Situation, in der Kurbelradius und Schubstange aufeinander normal stehen (wie man vielleicht *prima vista* vermuten könnte), sondern die bezüglich der Geschwindigkeit optimale Stellung ist „knapp neben dieser Position“. Aber wie kann dieser spezielle Punkt *inhaltlich* beschrieben

¹Dies soll natürlich nicht bedeuten, daß wir hier jeder beliebigen Scheinanwendung das Wort reden bzw. schreiben möchten.

²Das *Vernetzen mathematischer Sachverhalte* halten wir auch für eine fundamentale Idee der Angewandten Mathematik (vgl. HUMENBERGER/REICHEL 1995).

³An dieser Stelle sei Herrn Prof. KIRSCH (Kassel) gedankt für zahlreiche Anregungen und Kommentare zum in Rede stehenden Thema und zu folgender Aufgabe.

⁴Bei einer Gattersäge ist es z.B. wichtig, zu wissen, wann das Sägeblatt welche Geschwindigkeit hat, um den Holzvorschub zur Säge steuern zu können – bei großer Sägegeschwindigkeit kann der Holzvorschub natürlich stärker sein.

werden? Was ist bei dieser Lage geometrisch der Fall? Gibt es in dieser Situation einen anderen rechten Winkel? Gibt es eine Streckenlänge, an der die Maximalität der Kolbengeschwindigkeit abzulesen ist?

Der bezüglich der Klärung dieser Fragen zentrale Begriff (aus der „Kinematik“) ist der *Momentanpol* einer Bewegung. Wenn ein Punkt A sich auf einer bestimmten Kurve K bewegt, so bewegt er sich zu jedem Zeitpunkt in Richtung der Tangente an die Kurve (der „Geschwindigkeitsvektor“ ist ein Tangentialvektor). Dieselbe Tangente ergäbe sich, wenn sich der Punkt auf einem Kreis bewegte, der seinen Mittelpunkt irgendwo auf der Normalen zur Tangente durch A (auf der sogenannten *Bahnnormalen*) hat. Daher entspricht jede Bewegung eines Punktes A (in jedem Augenblick) einer Drehung um einen Punkt auf der *Bahnnormalen*. Dieser Punkt heißt der *Momentanpol* der Bewegung, der bei der Bewegung eines einzelnen Punktes nicht eindeutig festgelegt ist (jeder Punkt der Bahnnormalen kommt als Momentanpol in Frage – Fig. 3 links). Kennt man hingegen die beiden momentanen Bewegungsrichtungen der Endpunkte einer Strecke AB , so läßt sich der Momentanpol P der Gesamtbewegung durch Schnitt der zu A bzw. B gehörigen Bahnnormalen (meist) eindeutig festlegen⁵ – siehe Fig. 3 rechts.

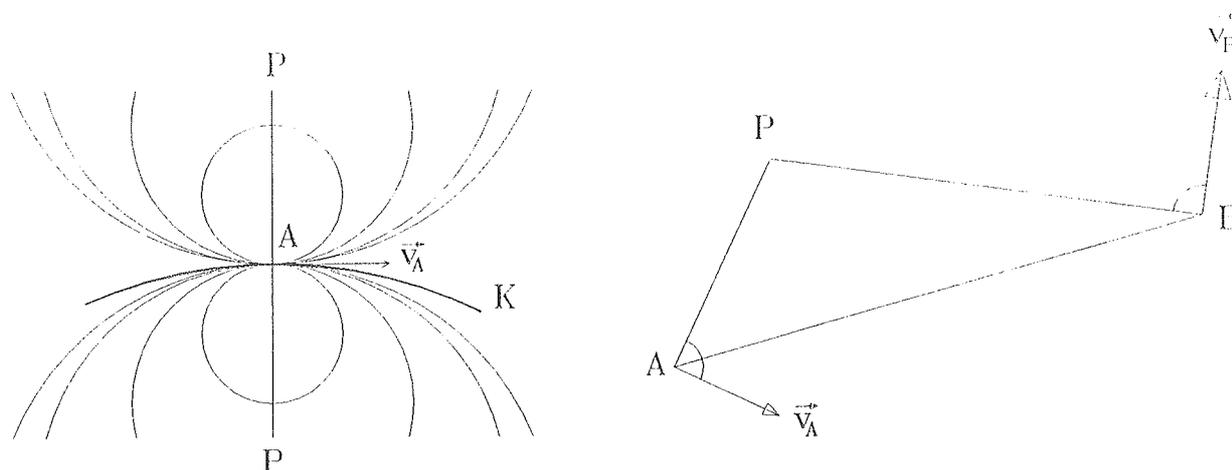


Fig. 3: Bahnnormale und Momentanpol bei der Bewegung eines Punktes bzw. einer Strecke

Mehr als dieses Wissen ist zur graphischen Aufklärung der in Rede stehenden Situation nicht nötig. Sei also B der Kolben und A der Kurbelzapfen einer (zentrischen oder geschränkten) Schubkurbel – siehe Fig. 4. In bezug auf folgende Überlegungen brauchen wir nicht zwischen zentrischen und geschränkten Schubkurbeln zu unterscheiden.

In jedem Moment der Bewegung der Schubstange wenden wir nun obige Überlegungen (Momentanpol) an: sie bewegt sich bei jeder Kurbelstellung genauso, als ob sie sich um den Momentanpol P drehte. Dies ist der Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen von A (Normale zur Kreistangente in A) und von B (Normale zur Bahngeraden des Kolbens in B). Da bei einer **Drehung** die Geschwindigkeiten⁶ v_A und v_B der gedrehten Punkte A und B jeweils das Produkt aus **Winkelgeschwindigkeit** ω und Radius sind und die Winkelgeschwindigkeit ja für beide

⁵Wir wollen jene Fälle, bei denen diese Bahnnormalen zusammenfallen bzw. parallel sind (z.B. bei „reinen“ Parallelverschiebungen), nicht betrachten – „Fernpunkte“. Die Tatsache, daß ebene Bewegungen (nicht nur von Strecken) stets einen eindeutigen Momentanpol besitzen (daß also alle Bahnnormalen einander in *einem* Punkt schneiden), ist – streng genommen – ein tiefliegender und zu beweisender Satz, dessen Aussage hier nur exemplarisch motiviert werden sollte. Es handelt sich dabei keinesfalls um etwas Selbstverständliches oder gar um eine Trivialität! Man kann den beiden Endpunkten einer Strecke nicht beliebige Momentangeschwindigkeitsvektoren „anheften“ und dadurch zu einer Beschreibung einer „Bewegung“ kommen, z.B. könnte in Fig. 3 (rechts) der Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_A nicht in die entgegengesetzte Richtung zeigen, weil sonst die Strecke AB durch die Bewegung „gedehnt“ werden müßte.

⁶Die Beträge der Geschwindigkeiten $|\vec{v}_A|$ und $|\vec{v}_B|$ seien mit v_A und v_B bezeichnet.

Wir können uns D als einen Ring vorstellen, der die beiden als wirkliche Stangen gedachten Geraden (Schubstange und Querachse) lose umschließt, und durch welchen sich die verlängerte Schubstange bei ihrer Bewegung hindurchschiebt – vgl. Fig. 5. Während sie sich hindurchschiebt, wandert der Ring natürlich auch auf der Querachse auf und ab.

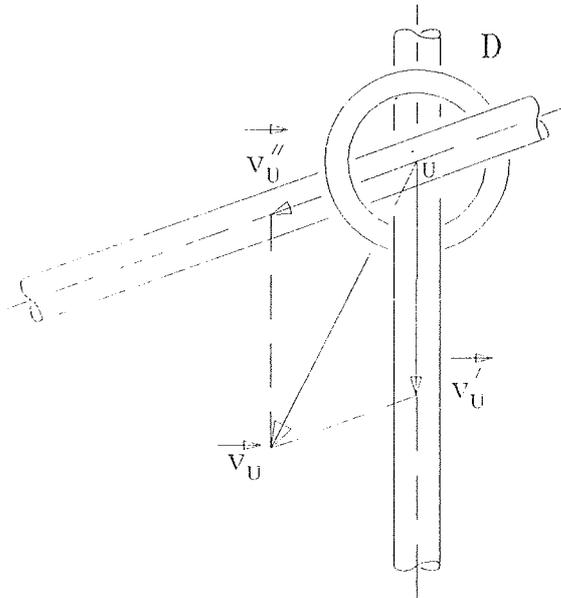


Fig. 5: D als Ring um verlängerte Schubstange und Querachse gedacht

Nun bezeichnen wir mit U denjenigen Punkt der Schubstange (bzw. deren Verlängerung), der im betrachteten Zeitpunkt sich in der Mitte des Ringes D befindet, also auch auf der Querachse liegt⁸. Da U ein Punkt der (verlängerten) Schubstange ist, steht sein momentaner Geschwindigkeitsvektor \vec{v}_U normal zum Polstrahl $PD = PU$ (siehe Fig. 4), weil die Bewegung der Schubstange momentan einer Drehung um P entspricht (analog ist ja $PA \perp \vec{v}_A$ und $PB \perp \vec{v}_B$). Daher ist – nebenbei bemerkt – die Geschwindigkeit v_U proportional zur Länge des momentanen Polstrahles \overline{PD} bzw. \overline{PU} (als momentaner Radius der Rotation). Die Komponenten \vec{v}_U' und \vec{v}_U'' sind dann offenbar die Geschwindigkeiten, mit welcher der Ring entlang der Querachse abwärtsgleitet, bzw. die Schubstange sich durch den Ring hindurchschiebt.

Wir sind an jener Situation interessiert, bei der der Ring D seine tiefste Lage erreicht hat (dann ist ja \overline{MD} maximal), bei der also seine Momentangeschwindigkeit 0 ist (die Position von D gibt die Kolbengeschwindigkeit an, also gibt die Geschwindigkeit von D eigentlich die Kolbenbeschleunigung an; die größte Kolbengeschwindigkeit wird bekanntlich bei Kolbenbeschleunigung gleich 0 erreicht). Wann ist nun v_U' – die Geschwindigkeit des Ringes D – gleich 0 bzw. in Vektorschreibweise $\vec{v}_U' = \vec{0}$? Offenbar dann, wenn \vec{v}_U mit \vec{v}_U'' zusammenfällt, und für die Komponente der Ringbewegung entlang der Querachse (also \vec{v}_U') „nichts mehr übrigbleibt“, wenn also „die ganze Geschwindigkeit \vec{v}_U in eine Durchschubgeschwindigkeit \vec{v}_U'' umgesetzt wird“. Da aber \vec{v}_U immer normal auf den Polstrahl PD steht und \vec{v}_U'' immer in Richtung der Schubstange zeigt, kann diese optimale Situation eben auch dadurch charakterisiert werden, daß der Polstrahl PD normal auf die Schubstange steht!

⁸Diese vielleicht künstlich anmutende Unterscheidung zwischen D und U wird dadurch nötig, weil D immer auf der Querachse „bleiben soll“ (D sei zu jedem Zeitpunkt der jeweilige Schnittpunkt von Schubstange(nverlängerung) und Querachse), hingegen der Punkt U – als wirklicher Punkt der Schubstange(nverlängerung) – ja nicht auf der Querachse bleibt, anders formuliert: der Schnittpunkt D von Querachse und Schubstangenverlängerung wird zu jedem Zeitpunkt durch einen anderen Punkt U der Schubstange realisiert – und diese Tatsache wird durch die Vorstellung von D als Ring (Idee von G. KIRSCH 1890) plastisch unterstützt!

Wir haben also folgenden Satz kinematisch-geometrisch begründet (für zentrische und geschränkte Schubkurbeln):

Satz: Die Kolbengeschwindigkeit ist genau dann maximal, wenn der Polstrahl PD normal auf die Schubstange steht!

Obwohl durch die Erkenntnisse dieses Abschnittes eine elementargeometrische **Konstruktion** der Situation des Maximums der Kolbengeschwindigkeit nicht ohne weiteres möglich ist (es resultiert daraus keine einfache Konstruktionsanleitung für α_{opt}), tragen sie u.E. wesentlich zum Verständnis der Situation bei!

Bemerkung: Da bei $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ der „Geschwindigkeitsvektor“ des Kurbelzapfens parallel zur Bahngerade (und somit zum Geschwindigkeitsvektor) des Kolbens verläuft, ist unmittelbar einsichtig, daß die Geschwindigkeit des Kolbens zu diesem Zeitpunkt (bei diesem Winkel) gleich der konstanten Geschwindigkeit des Kurbelzapfens ist, nämlich $\dot{\alpha} R$. In diesem Moment entspricht die Bewegung der Schubstange offenbar einer Parallelverschiebung. Man kann in diesem Zusammenhang (dadurch motiviert) sofort – auch vor jeder Rechnung – die interessante Frage stellen, ob es einen Winkel α gibt, bei dem die Kolbengeschwindigkeit *größer* als $\dot{\alpha} R$ ist, wo also die gleichförmige Bewegung des Kurbelzapfens eine Kolbengeschwindigkeit bewirkt, die größer als seine eigene ist. *Daß* es so einen Winkel geben muß, ist auch elementargeometrisch begründbar (siehe KIRSCH 1994, S. 218).

4 Analytische Bestätigung der geometrisch gewonnenen Erkenntnisse

Wir stellen zunächst einige Vorüberlegungen an, insbesondere für *zentrische* Schubkurbeln ($E = 0$). Die Werte der momentanen Hubhöhe H werden sich dann offenbar zwischen $H_{\text{min}} = L - R$ (bei $\alpha = \pi + 2k\pi$) und $H_{\text{max}} = L + R$ (bei $\alpha = 2k\pi$) bewegen (siehe Fig. 1).

Zwei Vereinfachungen:

- Da die Rotationsbewegung eine gleichmäßige sein soll (gleicher Drehwinkel in gleichen Zeitabständen), kann der Drehwinkel α selbst als ein Maß für die Zeit betrachtet werden. D.h. die erste Ableitung $\frac{dH}{d\alpha}$ kann als ein Maß für die Geschwindigkeit des Kolbens (Schubgeschwindigkeit) und die zweite Ableitung $\frac{d^2H}{d\alpha^2}$ als ein Maß für die Schubbeschleunigung gelten⁹. Man erspart sich dadurch die jeweiligen „inneren Ableitungen“ $\dot{\alpha} = \text{const.}$
- Die Maßzahlen von R, L und H hängen natürlich von den gewählten Einheiten ab; wir wählen R als Einheit (wir messen „in Radien R “), so daß wir $r = \frac{R}{R} = 1$, $\ell = \frac{L}{R}$ und $h = \frac{H}{R}$ erhalten. Die Bezeichnungen mit Kleinbuchstaben sind schon in Fig. 1 in Klammer angegeben. Weiters soll dies auch für alle anderen Längenmaße gelten, insbesondere für die in Fig. 6 mit p bezeichnete Strecke und im geschränkten Fall für die Exzentrizität, also $p = \frac{P}{R}$ und $e = \frac{E}{R}$.

⁹Der Wert von α kann auch direkt als Zeit interpretiert werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit 1 s^{-1} beträgt (ca. 57.3° pro Sekunde).

In Zusammenhang mit den Werten von H bzw. h ist es von vornherein vielleicht gar nicht so klar, daß h wirklich größer wird, wenn die Kurbel die Stelle $\alpha = \pi$ verläßt (die Projektion der Schubstange auf die Bahngerade des Kolbens wird ja kürzer, anders formuliert: durch die Bewegung zur Seite wird Länge der Schubstange „verbraucht“) – dazu später etwas mehr!

Das *Geschwindigkeitsmaximum* und das *Geschwindigkeitsminimum* des Kolbens liegen beim zentrischen Fall erstens symmetrisch bezüglich des Winkels α und sind zweitens betraglich gleich groß mit entgegengesetztem Vorzeichen. Sie treten auch beim selben Wert h auf (an der selben Position des Kolbens bei der Hin- bzw. Herbewegung):

$$\alpha_{\min} = -\alpha_{\max}, \quad h(\alpha_{\max}) = h(\alpha_{\min}) \quad \text{und} \quad v_{\min} = -v_{\max}.$$

Diese drei „Symmetrien“ bestehen bei geschränkten Schubkurbelgetrieben – wie wir sehen werden und wie sich auch a priori vermuten läßt – i.a. nicht mehr.

Wir setzen in diesem Abschnitt nichts des vorherigen voraus und beginnen quasi von neuem; wir wollen erstens die oben geometrisch-kinematisch gewonnenen Erkenntnisse nun auch mit Hilfe von Differentialrechnung gewinnen¹⁰ und zweitens die für die Kolbengeschwindigkeit optimale Winkelstellung α_{opt} ausrechnen, also eine Lösung des ursprünglichen Problems angeben. Die schließlich zu lösende Gleichung ist eine dritten Grades (siehe (13)), die „exakt“ gelöst werden kann (CARDANO-Formel). Ob jedoch die Gleichung wirklich exakt oder „nur“ näherungsweise gelöst wird¹¹, scheint uns gar nicht so wichtig zu sein, das Wesentliche der folgenden Überlegungen liegt u.E. vor allem darin, daß es überhaupt möglich ist, die anfänglich doch kompliziert anmutende trigonometrische Gleichung so umzuformen, daß sie exakt gelöst werden kann (ausschließlich mit schulmathematischen Mitteln).

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall einer zentrischen Schubkurbel; ihren Radius setzen wir mit 1 fest und die Länge der Schubstange mit ℓ (siehe Fig. 6).

Aus Fig. 6 ergeben sich unmittelbar die Beziehungen

$$p = \sqrt{\ell^2 - \sin^2 \alpha}, \quad (2)$$

$$h = \cos \alpha + p, \quad (3)$$

$$v = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{p} \quad \left(= -\frac{dh}{d\alpha} ! \right). \quad (4)$$

Eine wichtige Erkenntnis daraus ist, daß $v = -\frac{dh}{d\alpha}$ gilt, daß also die Länge der Strecke v (i.e. \overline{MD}) als Betrag der Kolbengeschwindigkeit deutbar ist (diese Erkenntnis haben wir oben mittels ähnlicher Dreiecke und des Begriffs des *Momentanpols* gewonnen).

Nun wollen wir auch analytisch zeigen, daß die Kolbengeschwindigkeit v genau dann maximal ist, wenn Schubstange und Polstrahl PD aufeinander normal stehen:

$$v \text{ ist maximal} \iff \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Für den Winkel β ergibt sich zunächst

$$\beta = \arctan \frac{\sin \alpha}{p}. \quad (5)$$

¹⁰Die Tatsache, daß der Kolben genau dann seine größte Geschwindigkeit hat, wenn Polstrahl PD und Schubstange normal aufeinander stehen, kann auch rechnerisch bestätigt werden. Aber ohne vorherige geometrische Überlegungen wird es schwer fallen, auf diese Vermutung überhaupt zu kommen.

¹¹Wir würden die näherungsweise Lösung z.B. mit Hilfe des NEWTON-Verfahrens und eines Computeralgebra-Systems sogar bevorzugen.

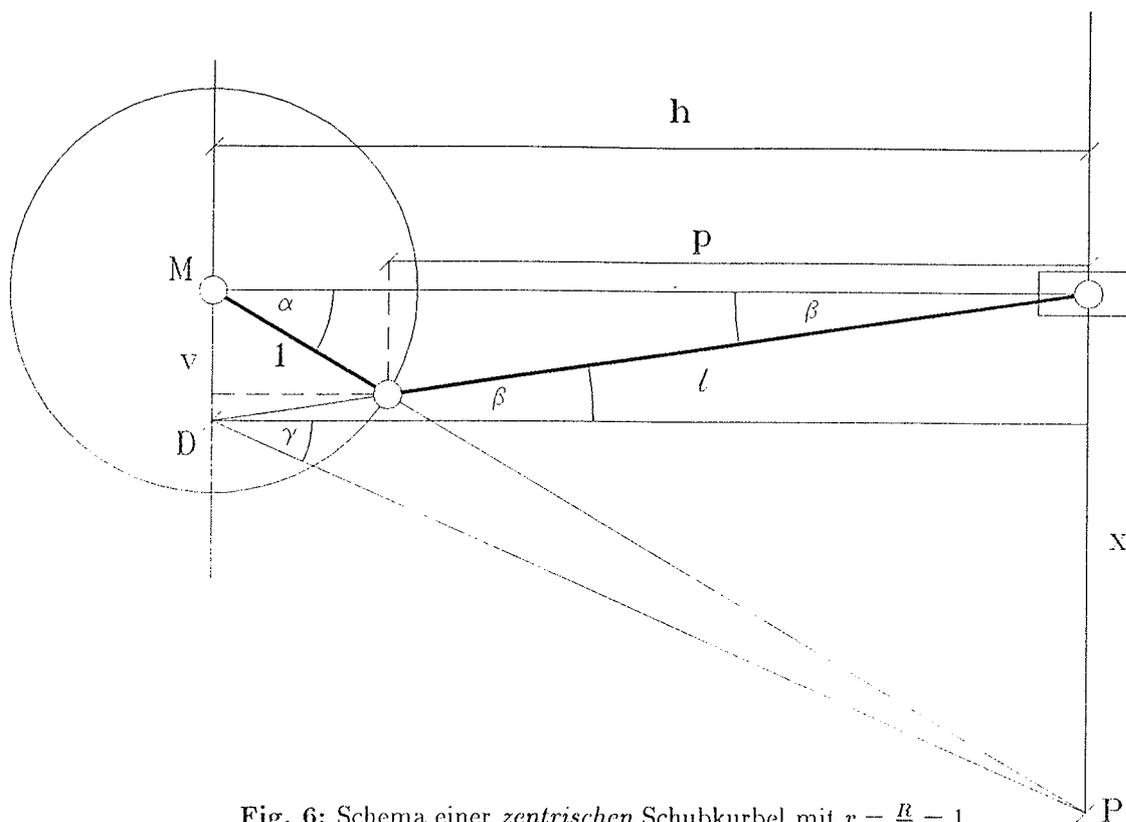


Fig. 6: Schema einer zentrischen Schubkurbel mit $r = \frac{R}{R} = 1$

Weiters lesen wir aus Fig. 6 die Gleichungen $x = h \cdot \tan \alpha$ und $v = h \cdot \frac{\sin \alpha}{p}$ ab; damit ergibt sich für $\gamma = \arctan \frac{x-v}{h}$ in weiterer Folge

$$\gamma = \arctan \left(\tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{p} \right) . \tag{6}$$

Nun haben wir zu zeigen (unter Vernachlässigung der Untersuchung der zweiten Ableitung):

$$\underbrace{\frac{dv}{d\alpha} = 0}_{(*)} \Leftrightarrow \underbrace{\beta + \gamma = 90^\circ}_{(**)} .$$

Wir bilden

$$\frac{dv}{d\alpha} = \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{p} + \cos \alpha \cdot \frac{p \cos \alpha - \frac{dp}{d\alpha} \sin \alpha}{p^2} ,$$

so daß die Bedingung (*) nach Multiplikation mit p^2 und Einsetzen von $\frac{dp}{d\alpha} = -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{p}$ äquivalent ist mit

$$p^2 \cos \alpha - p \sin^2 \alpha + p \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{p} = 0 .$$

Wir erhalten daraus weiter

$$p^2 \cos \alpha + p \cos^2 \alpha = p \sin^2 \alpha - \frac{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{p} \tag{7}$$

$$p \cos \alpha (p + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha \left(p - \frac{\cos^2 \alpha}{p} \right) \tag{8}$$

$$p^2 \cos \alpha (p + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha (p^2 - \cos^2 \alpha) \tag{9}$$

$$p^2 \cos \alpha = \sin^2 \alpha (p - \cos \alpha) \quad (10)$$

$$\underbrace{(p^2 + \sin^2 \alpha)}_{\ell^2} \cos \alpha = p \sin^2 \alpha, \quad (11)$$

und daraus schließlich

$$\boxed{\ell^2 \cos \alpha = p \sin^2 \alpha} \quad (12)$$

Auch die Bedingung (**) ist äquivalent mit (12), was wir auch kurz zeigen wollen. $\beta + \gamma = 90^\circ$ ist äquivalent mit $\tan \gamma = \tan(90^\circ - \beta) = \cot \beta$. Aufgrund der obigen arctan-Beziehungen für β bzw. γ in (5) bzw. (6) ergibt sich daraus $\tan \alpha - \frac{\sin \alpha}{p} = \frac{p}{\sin \alpha}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $p \sin \alpha \cos \alpha$, so erhalten wir $p \sin^2 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha = p^2 \cos \alpha$ und hieraus schließlich dieselbe Beziehung wie in (12)!

Nun kümmern wir uns um die zu lösende Gleichung $\ell^2 \cos \alpha = p \sin^2 \alpha$. Da $p = \sqrt{\ell^2 - \sin^2 \alpha}$ ist, müssen wir quadrieren und erhalten $\ell^4 \cos^2 \alpha = (\ell^2 - \sin^2 \alpha) \sin^4 \alpha$. Daraus erhalten wir mit $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ die Gleichung $\sin^6 \alpha - \ell^2 \sin^4 \alpha - \ell^4 \sin^2 \alpha + \ell^4 = 0$. Wir dividieren diese Gleichung noch durch ℓ^6 und erhalten

$$\frac{\sin^6 \alpha}{\ell^6} - \frac{\sin^4 \alpha}{\ell^4} - \frac{\sin^2 \alpha}{\ell^2} + \frac{1}{\ell^2} = 0.$$

Setzt man hier zur Abkürzung $y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin^2 \alpha}{\ell^2}$, so erhält man eine kubische Gleichung in y :

$$\boxed{y^3 - y^2 - y + \frac{1}{\ell^2} = 0}, \quad (13)$$

wobei ein gängiger Wert für ℓ bei Gattersägen z.B. $\ell = 11$ ist, welchen wir hier auch benutzen wollen.

Die Gleichung dritten Grades

$$y^3 - y^2 - y + \frac{1}{121} = 0 \quad (14)$$

kann sogar exakt gelöst werden, wobei aber die dafür nötigen und leider sehr kompliziert handhabbaren CARDANO-Formeln i.a. kaum Gegenstand des Unterrichts gewesen sein werden. Mit einem Computeralgebrasystem (z.B. mit dem an deutschen und österreichischen Schulen verbreiteten Programm DERIVE) wäre es auch ohne weiteres denkbar, die Gleichung zu lösen, ohne die dahintersteckenden CARDANO-Formeln zu thematisieren („Black Box“)¹². Man erhielte hier die drei reellen Nullstellen (auf 8 Dezimalstellen gerundet)

$$y_1 \approx -0.62394197, \quad y_2 \approx 0.00819781, \quad y_3 \approx 1.61574417,$$

wobei hier wegen $y = \frac{1}{121} \sin^2 \alpha$ nur y_2 als Lösung des Problems in Frage käme und dies schließlich für α_{opt} den Wert $\alpha_{\text{opt}} \approx \pm 1.48087 \approx \pm 84.85^\circ$ bedeutete.

Bemerkung: Dieser Winkel unterscheidet sich hier nur minimal von jenem, bei dem Schubstange und Kurbelradius aufeinander normal stehen: $\arctan 11 \approx 1.4801 \approx 84.81^\circ$.

¹²Ähnlich wie man mit DERIVE auch Stammfunktionen von z.B. $\sqrt{1+x^2}$ bestimmen kann, ohne die Hyperbelfunktionen zu thematisieren. Ein zu häufiger Einsatz dieses Prinzips wäre allerdings einem auf Verständnis basierenden Unterricht sicher nicht zuträglich!

Wenn sich die Kurbel (siehe Fig. 1) im Uhrzeigersinn dreht, so fällt h für $0 < \alpha < \pi$ und wächst für $\pi < \alpha < 2\pi$, wodurch (anschaulich) geklärt ist, daß sich bei $\alpha \approx 84.85^\circ$ das Geschwindigkeitsminimum v_{\min} (negatives Vorzeichen) und bei $\alpha \approx -84.85^\circ$ das Geschwindigkeitsmaximum v_{\max} mit positivem Vorzeichen befindet ($v_{\min} = -v_{\max}$). An den Totpunkten selbst ($\alpha = 0, \alpha = \pi$) ist die Momentangeschwindigkeit jeweils 0.

Für den Absolutwert der „optimalen Geschwindigkeit“ ergibt sich mit $\alpha_{\text{opt}} = 84.85^\circ$ aus (3) bzw. (4) in unserem Fall ($\ell = 11$) $\left| \frac{dh}{d\alpha}(\alpha_{\text{opt}}) \right| = v_{\text{opt}} \approx 1.004$ [Längeneinheiten pro Sekunde].

Die Werte von h bewegen sich bei unseren Werten $\ell = 11$ und $r = 1$ klarerweise zwischen 10 und 12, wobei $h(\alpha_{\text{opt}}) \approx 11.0446$ ist – siehe die Gleichungen (2) und (3); d.h. der optimale Punkt bzgl. der Geschwindigkeit liegt *nicht* im Mittelpunkt der Hubstrecke!

Nun jedoch noch zu der oben aufgeworfenen Frage, warum h tatsächlich größer wird, wenn die Kurbel (bei zentrischen Schubkurbeln) die Position $\alpha = \pi$ verläßt. Hierzu ist z.B. nachzuweisen, daß $\frac{dh}{d\alpha} > 0$ für $\pi < \alpha < \pi + \varepsilon$ gilt. Wir haben also zu zeigen:

$$\frac{dh}{d\alpha} = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\ell^2 - \sin^2 \alpha}} - \sin \alpha > 0 \quad \text{für} \quad \pi < \alpha < \pi + \varepsilon .$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit dem positiven Wert $\frac{\sqrt{\ell^2 - \sin^2 \alpha}}{-\sin \alpha}$ ergibt

$$\sqrt{\ell^2 - \sin^2 \alpha} > -\cos \alpha ,$$

eine äquivalente Ungleichung mit zwei positiven Seiten. Quadrieren liefert anschließend wegen $\ell > 1$ den endgültigen Beweis (es gilt ja sogar $\ell > 2$ bei einer umlauffähigen Kurbel).

Bemerkung: Die Betrachtung der komplizierten zweiten Ableitung der Geschwindigkeit ist nach dem Vorangehenden überflüssig. Es ist allerdings sicher von großem Wert, den Graphen von h in Abhängigkeit von α für konkrete Werte von ℓ zu zeichnen (siehe z.B. KIRSCH 1994, S.217).

Trotz der exakten Lösbarkeit könnte Gleichung (14) auch näherungsweise mit dem bekannten NEWTON-Verfahren gelöst werden. Die Güte der Lösungen bliebe die gleiche, da die Genauigkeit – im Falle der Konvergenz des NEWTON-Verfahrens – ein (im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechenhilfsmittel) beliebig vorgebar Parameter ist; noch dazu sind fast alle Kalkulationen auch bei den „exakten“ Lösungswegen (Formeln) Abbruchs- und Rundungsfehlern unterworfen (kein Rechner der Welt kann mit wirklich exakten Daten rechnen), wodurch auch die auf analytisch exakten Wegen erhaltenen Ergebnisse den Nimbus der völligen Exaktheit verlieren (müssen).

Man kann schon vor jeder Rechnung erste Überlegungen für einen guten allfälligen Startwert für α anstellen, wobei es anschaulich (siehe Fig. 1) nicht verwunderlich sein dürfte, daß die größte Schubgeschwindigkeit in der Nähe jenes Punktes erreicht wird, wo *Schubstange und Kurbelradius einen rechten Winkel* einschließen (dort hat ein Weiterdrehen der Kurbel einen „großen Effekt“). Da diese Situation (bei relativ großem ℓ) ungefähr bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ eintritt, ist $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ sicher ein guter Startwert, und dies bedeutet $y \approx \frac{1}{121}$.

Weitere mögliche Untersuchungen zum NEWTON-Verfahren: Bezeichnen wir die Funktion, deren Nullstelle wir suchen – siehe Gleichung (14) –, mit $f(y)$, so können wir leicht überprüfen, daß $f(0) = \frac{1}{121} > 0$ und z.B. $f(1) = -\frac{120}{121} < 0$ ist, d.h. es liegt eine reelle Nullstelle zwischen 0 und 1. Da es sich bei $f(y)$ um eine streng monoton fallende Funktion im Intervall

$I = (0, 1)$ handelt ($f'(y) = 3y^2 - 2y - 1 < 0$ in I), kann auch ohne die weiter oben getätigten Vorüberlegungen vermutet werden, daß die Nullstelle nur knapp über 0 liegt. Wir verwenden $y_0 = 0.01$ als Startwert und erhalten mit der NEWTON-Iteration $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ die Werte $y_1 \approx 0.0082$ und $y_2 \approx 0.0081978$, wobei sich die bei y_2 angegebenen Dezimalstellen bei den weiteren Iterationsschritten nicht mehr verändern. Wir haben also offenbar ein auf *sieben* Dezimalstellen genaues Ergebnis für y durch nur *zwei* Iterationsschritte erhalten, was zu einem analogen Wert für α_{opt} führt: $\alpha \approx \pm 84.85^\circ$.

Wenn ohnehin ein Näherungsverfahren angewendet wird (also der Grad der Gleichung keine Rolle spielt), so könnte Gleichung (14) auch umgeschrieben werden (vermöge der Substitution $x := \sin \alpha$ d.h. $y = \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{1}{121} x^2$) zu

$$x^6 - 121 x^4 - 14641 x^2 + 14641 = 0, \quad (15)$$

bzw. zu

$$((x^2 - 121)x^2 - 14641)x^2 + 14641 = 0, \quad (16)$$

was einen kleinen Vorteil bei der Handhabung bedeutet, wenn kein Computeralgebrasystem (wie z.B. DERIVE), sondern nur ein Taschenrechner zur Durchführung des NEWTON-Verfahrens zur Verfügung steht; außerdem muß dann bei der Berechnung von α nicht durch die kleine Zahl $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{121}$ dividiert werden, was – numerisch gesehen – mehr „Stabilität“ bedeutet. Dividieren durch sehr kleine Zahlen soll bekanntlich ja vermieden werden. Man erhält hier (je nach Startwert) $x \approx \pm 0.995959$, woraus wiederum der Wert für $\alpha_{\text{opt}} = \arcsin x \approx \pm 1.48087 \approx \pm 84.85^\circ$ unmittelbar folgt.

Literatur

1. HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich.
2. KIRSCH, A. (1994): Zur Behandlung des Hubkolbenmotors im Mathematikunterricht. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **47**, 4, 216–218.
3. KIRSCH, G. (1890): Über die graphische Bestimmung der Kolbenbeschleunigung. In: *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure* **34**, 1320–1321.
4. RÖSCH, P. (1993): Der Hubkolbenmotor – ein harmonischer Oszillator? In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **46**, 6, 343–346.

Anschrift des Verfassers:

Hans HUMENBERGER
 Institut für Mathematik und Angewandte Statistik
 Universität für Bodenkultur
 Gregor Mendel-Straße 33
 A – 1180 Wien
 E-mail: hans@edv1.boku.ac.at

Die Fortsetzung dieses Beitrages (insbesondere die Behandlung geschränkter Schubkurbeln und eine Lösung von prinzipiell anderer Art) wird in der nächsten Ausgabe von AMMU abgedruckt (AMMU.11, Beitrag 1, 7pp).

